ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

A

Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN FINAL – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2018-2019

DURÉE: 2H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouge et vert sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 15 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 10 points
  - *Page 1*
- Question 3 – 20 points
  - *Page 2*
- Question 4 – 25 points
  - *Page 2*
- Question 5 – 30 points
  - *Page 3*

QUESTION 1 *(15 points)*

Sur un oscillateur élémentaire, avec raideur k, masse m et coefficient d'amortissement c, on applique une force périodique, ayant la formule :

$$f(t) = 4F_0\cos(\omega t)\sin^2(\omega t)$$

i) **Décomposer la force $f(t)$ selon ses harmoniques, en calculant F_n et ψ_n. .... (3 pts)**
ii) **Calculer les harmoniques du déplacement, avec X_n et φ_n, en fonction des paramètres du système. .... (5 pts)**
iii) **Calculer la valeur de la fréquence ω pour laquelle la valeur du premier harmonique du déplacement X_1 est égale à la valeur du troisième harmonique divisé par neuf $\left(\frac{X_3}{9}\right)$.(7 pts)**

Formules d'aide :

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \qquad \sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} \qquad \cos(A)\sin(B) = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$$

QUESTION 2 *(10 points)*

Le système dans la Figure 2.1.a reçoit des vibrations externes à deux fréquences : $\omega_{ext,1}^2 = 0.9\omega_0^2$ et $\omega_{ext,2}^2 = 1.1\omega_0^2$, où ω_0 est la pulsation propre du système original. On veut limiter l'amplitude de vibration du système avec un amortisseur de Frahm en version conservative (Figure 2.1.b) avec les conditions suivantes : la pulsation propre de l'oscillateur secondaire est la même que celle de l'oscillateur principal, l'amplitude du système final est 40 fois plus petite que l'amplitude du système original (Figure 2.1.a). Calculer :

i) **Le rapport entre les masses m_2/m_0.**
ii) **L'amplitude de la masse secondaire par rapport à l'amplitude du système original.**

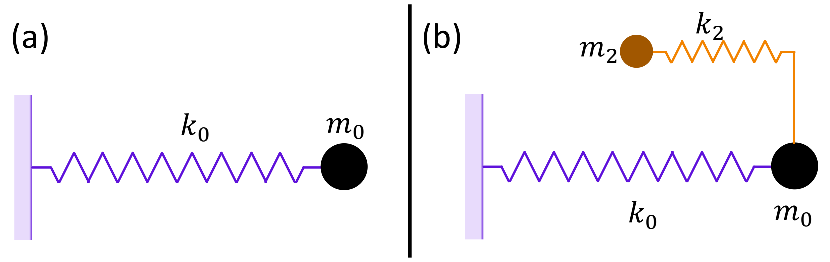


Figure 2.1 | Schémas pour les 2 systèmes.

QUESTION 3 *(20 points)*

Dans le système *sans gravité* de la Figure 3.1 on a une barre de masse m et rigidité infinie, et deux masses ponctuelles $2m$ et m. Les structures sont reliées par des ressorts de rigidité k et $2k$. Si l'on considère les coordonnées dessinées dans la Figure 3.1 :

- **i) Calculer les positions d'équilibre $x_{1,0}$, $x_{2,0}$, et $x_{3,0}$ si $F_1(t) = F_1$ .... (3 pts)**
- **ii) Écrire les équations de mouvement du système .... (7 pts)**
- **iii) Calculer la matrice de rigidité, de masse, et d'amortissement. .... (3 pts)**
- **iv) Calculer le vecteur de « force » ou d'excitation sur les coordonnées du système .... (5 pts)**
- **v) Est-ce que le système satisfait la condition de Caughey ? .... (2 pts)**

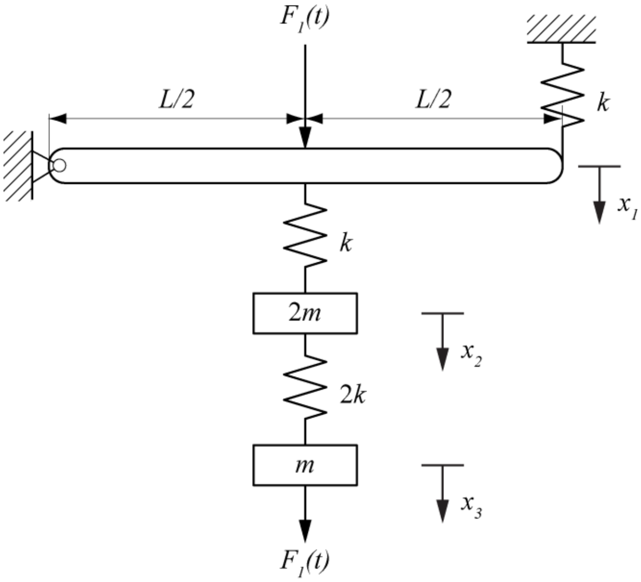


Figure 3.1 | Schéma du système.

QUESTION 4 *(25 points)*

Le système de la Figure 4.1.a se compose d'une barre sans masse de rigidité en flexion EI et longueur L, et deux balles avec masses m_0.

- **i) Calculer la matrice de flexibilité et la matrice des masses du système. .... (5 pts)**
- **ii) Combien des modes propres possède ce système ? .... (2 pts)**
- **iii) Calculer la matrice de rigidité du système. .... (3 pts)**
- **iv) Déterminer les pulsations propres. .... (5 pts)**
- **v) Déterminer les vecteurs propres. .... (5 pts)**
- **vi) Si le système perd sa symétrie et la distribution des masses se trouve comme sur la Figure 4.1.b, calculer (approx) les nouvelles pulsations propres du système. .... (5 pts)**

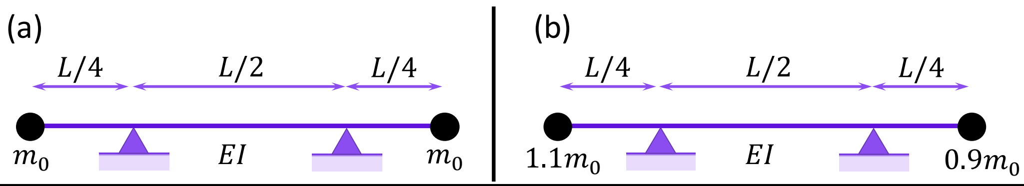


Figure 4.1 | Schéma des systèmes.

QUESTION 5 *(30 points)*

Le système de la Figure 5.1 se compose de 3 masses et 6 ressorts.

- **i) Combien de degrés de liberté trouve-t-on dans le système ?..(2 pts)**
- **ii) Calculer la matrice de rigidité et la matrice des masses du système ....(5 pts)**
- **iii) Déterminer les pulsations propres..(5 pts)**
- **iv) Déterminer les vecteurs propres. ....(5 pts)**
- **v) Si l'on tape avec un marteau sur la masse centrale avec une force $F(t) = F_0\delta(t)$, calculer la force effective sur chaque mode normal de vibration ....(3 pts)**
- **vi) Calculer le mouvement de chaque mode normal par rapport au temps.......................(6 pts)**
- **vii) Calculer le mouvement du système en coordonnées réelles (physiques)....................(4 pts)**

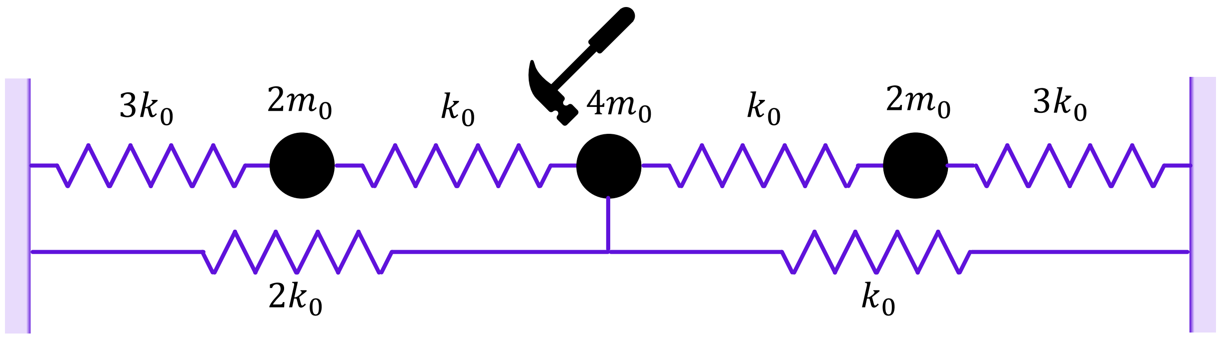
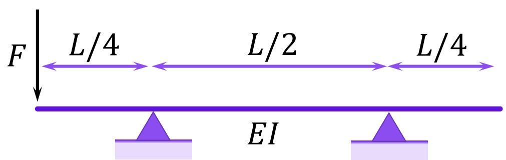


Figure 5.1 | Schéma du système, avec les 3 masses et les 6 ressorts.

Formules d'aide pour Question 4



$$w(x) = \frac{FL^3}{192EI}\begin{cases} 3 - 14\frac{x}{L} + 32\left(\frac{x}{L}\right)^3 & x \le \frac{L}{4} \\ \frac{15}{4} - 23\frac{x}{L} + 36\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 16\left(\frac{x}{L}\right)^3 & \frac{L}{4} \le x \le \frac{3L}{4} \\ -3 + 4\frac{x}{L} & x \ge \frac{3L}{4} \end{cases}$$

Matrice inverse:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}$$